第 2 章

逻辑代数基础

- **2.1 逻辑代数的基本运算**
- 2.2逻辑代数的运算规则
- 2.3 逻辑函数表述方法
- 2.4 逻辑函数的标准形式
- 2.5逻辑函数的化简方法

逻辑代数的基本运算

1. 逻辑函数的基本概念

逻辑： 事物之间的因果关系。

逻辑代数（布尔代数Boole Algebra）：描述客观事物逻辑关系的数学方法。

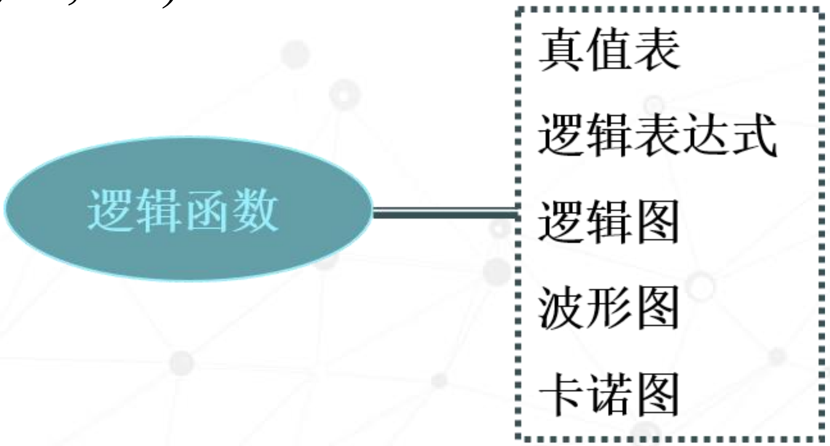
逻辑代数中的变量称为逻辑变量，一般用大写字母*A*、*B*、*C*、・・・表示，逻辑变量的取值只有两种，即逻辑0和逻辑1。0和1称为逻辑常量。逻辑0和1本身并没有数值意义，并不代表数量的大小，仅作为一种符号，代表事物矛盾双方的两种对立的状态。

逻辑代数的基本运算

1.逻辑函数的基本概念

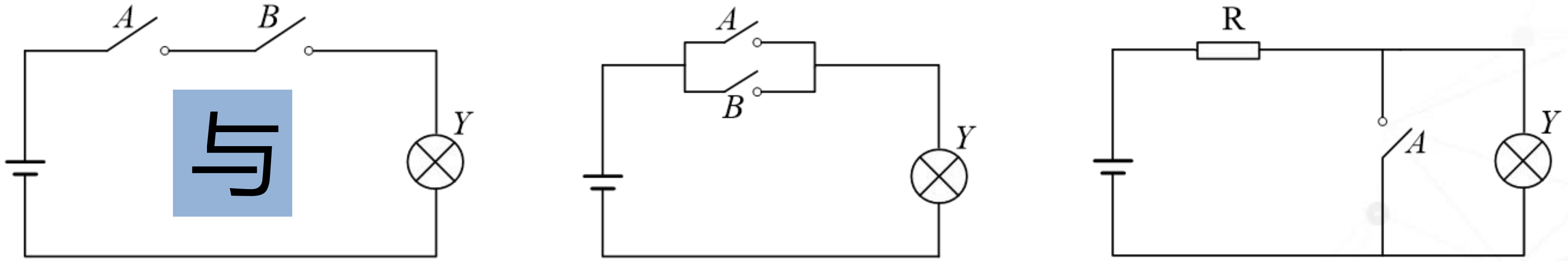
设输入逻辑变量为A、B、C . . . ，输出逻辑变量为F 。当A、B、C . . . 的取值确定后，F 的值就被唯一的确定下来，则称F是A、B、C . . . 的逻辑函数，记为：

$$F = f(A, B, C, \ldots)$$



逻辑代数的基本运算

2. 逻辑代数的三种基本逻辑运算



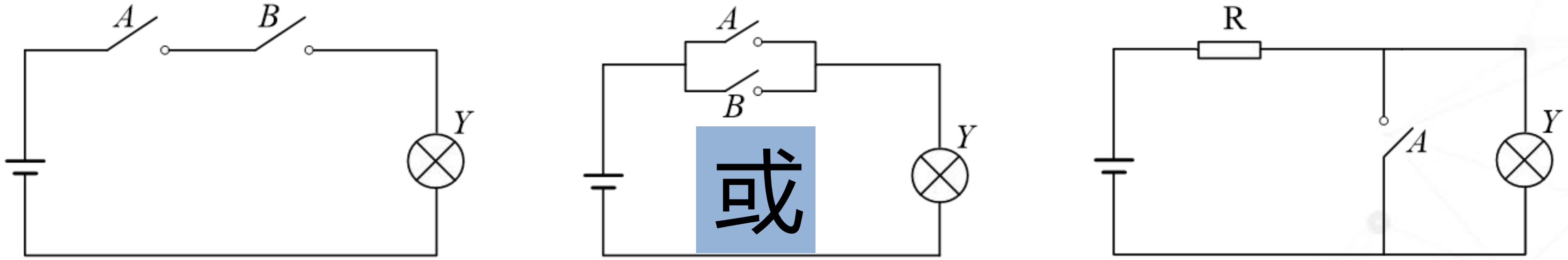
“与”运算又称“与”逻辑、“逻辑乘”。

与运算： 决定事件发生的各条件中，所有条件都具备，事件才会发生（成立）。这种因果关系称为与运算。

如：招聘，取得毕业资格等。

逻辑代数的基本运算

2. 逻辑代数的三种基本逻辑运算



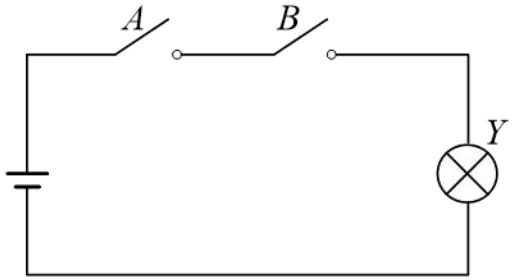
“或”运算又称“或”逻辑、“逻辑加”。

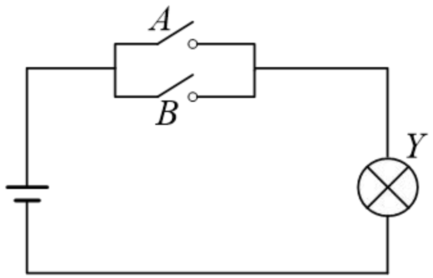
或运算： 决定事件发生的若干条件中，有一个或一个以上的条件具备，时间就会发生（成立）。这种因果关系称为或运算。

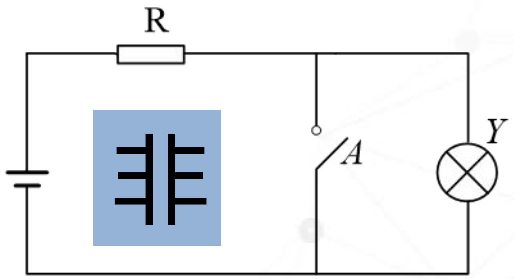
如：可乘坐火车、汽车、飞机到达目的地。

逻辑代数的基本运算

2. 逻辑代数的三种基本逻辑运算







“非”运算又称“非”逻辑、“逻辑否定”。

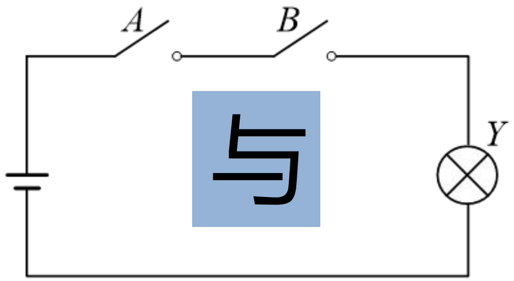
非运算：决定事件发生的各条件中，条件不具备事件才会发生（成立）。这种因果关系称为与运算。

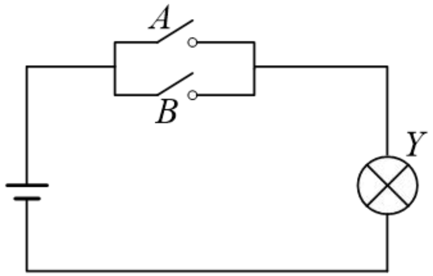
如：下雨则运动会暂停。

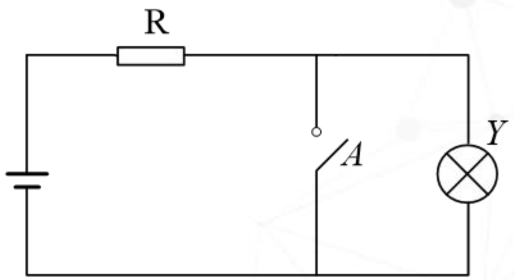
逻辑代数的基本运算

规定:开关合为逻辑“1”
开关断为逻辑“0”
灯亮为逻辑“1”
灯灭为逻辑“0”

2. 逻辑代数的三种基本逻辑运算







与逻辑功能表

开关A	开关B	灯Y
断开	断开	灭
断开	闭合	灭
闭合	断开	灭
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

有0出0,
全1为1

逻辑表达式:

$Y=A\cdot B$

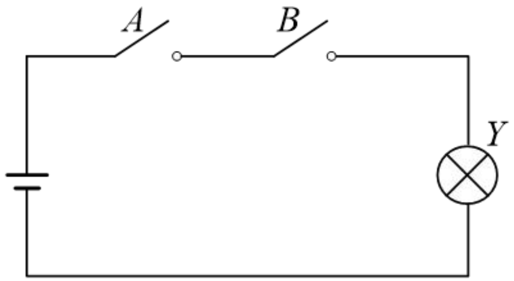
$Y=AB$

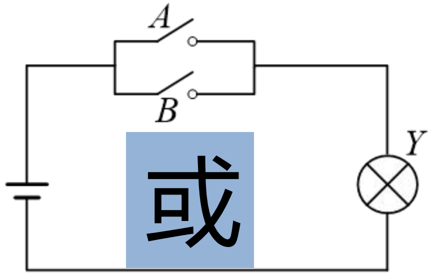
$Y=A\&B$

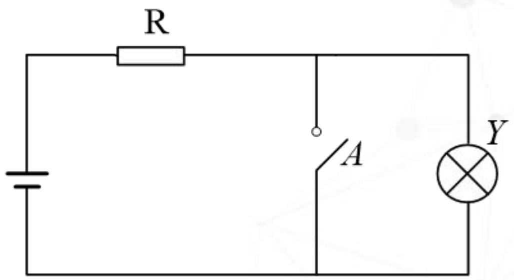
规定：开关合为逻辑“1”
开关断为逻辑“0”
灯亮为逻辑“1”
灯灭为逻辑“0”

逻辑代数的基本运算

2. 逻辑代数的三种基本逻辑运算







有1出1，
全0为0

或逻辑功能表

开关A	开关B	灯Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

或逻辑真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑表达式：

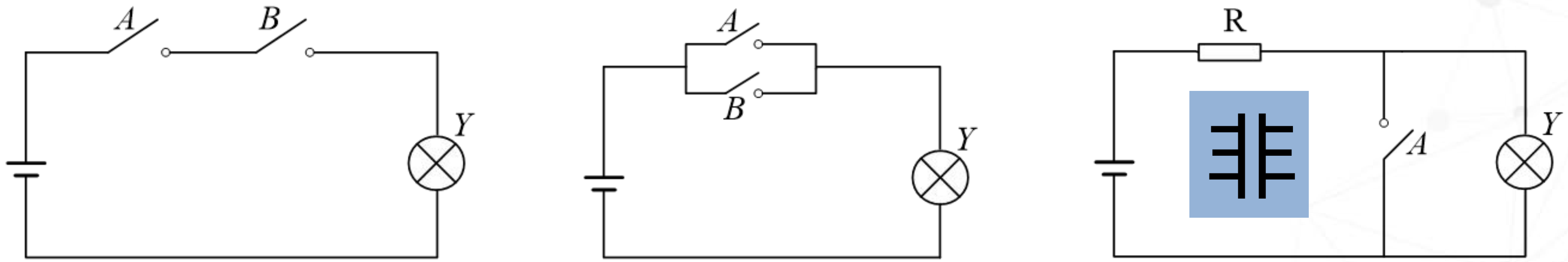
$Y=A+B$

$Y=A|B$

逻辑代数的基本运算

规定:开关合为逻辑“1”
开关断为逻辑“0”
灯亮为逻辑“1”
灯灭为逻辑“0”

2. 逻辑代数的三种基本逻辑运算



1则0，
0则1

逻辑表达式：

$Y = \overline{A}$

$Y = A'$

非逻辑真值表

A	Y
0	1
1	0

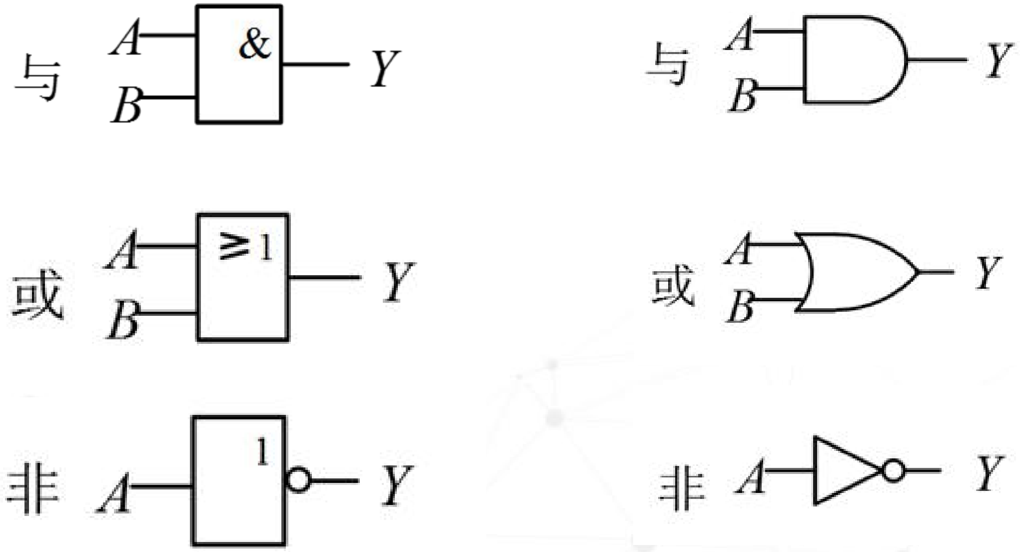
非逻辑功能表

开关A	灯Y
断开	亮
闭合	灭

逻辑代数的基本运算

门电路：实现基本运算、复合运算的单元电路，

如与门、与非门、或门 ……



$\Rightarrow$ $Y = A \cdot B$

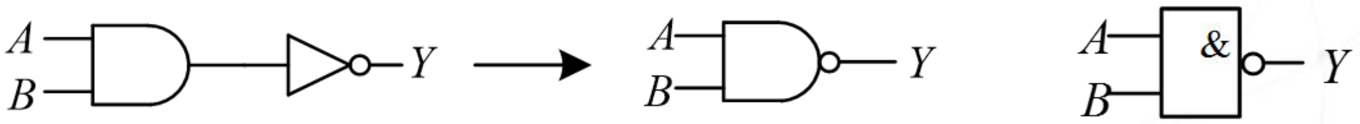
$\Rightarrow$ $Y = A + B$

$\Rightarrow$ $Y = \overline{A}$

逻辑代数的基本运算

3. 复合逻辑运算

（1）与非逻辑运算



A	B	$Y=\overline{A\cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

有0出1，全1为0

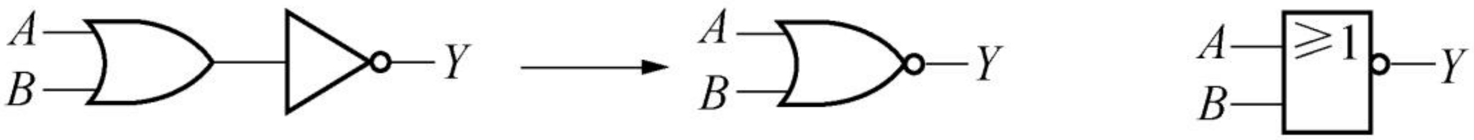
$A=1$ 或 $A=B$ 时，

$Y=\overline{B}$　可作反相器

逻辑代数的基本运算

3. 复合逻辑运算

（2）或非逻辑运算



A	B	$Y=\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

有1出0，全0为1

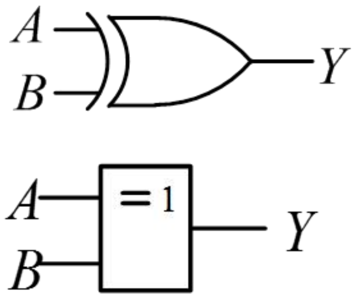
$\boldsymbol{A=0}$ 或 $\boldsymbol{A=B}$ 时，

$\boldsymbol{Y=\overline{B}}$ 可作反相器

逻辑代数的基本运算

3. 复合逻辑运算

（3）异或逻辑运算



异或:

$Y = A \oplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

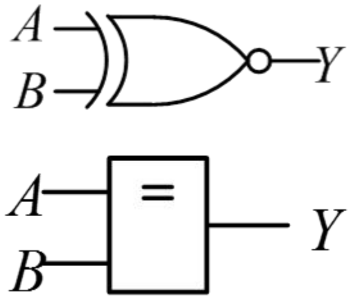
$A=1$时，$Y=\overline{B}$　　可作反相器

$A=0$时，$Y=B$　　可作缓冲器

逻辑代数的基本运算

3. 复合逻辑运算

（4）同或逻辑运算



同或

$Y = A \odot B$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \odot B = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

$$\boxed{A \oplus B = \overline{A \odot B}}$$

$$\boxed{A \odot B = \overline{A \oplus B}}$$

- 2.1 逻辑代数的基本运算
- **2.2逻辑代数的运算规则**
- 2.3 逻辑函数表述方法
- 2.4 逻辑函数的标准形式
- 2.5逻辑函数的化简方法

逻辑代数的运算规则

1. 逻辑代数的基本公理

(1) **公理 1**：设 A 为逻辑变量，若 $A \neq 0$，则 $A=1$；若 $A \neq 1$，则 $A=0$。这个公理决定了逻辑变量的双值性。特别注意，在逻辑变量和逻辑函数中的 0 和 1 所代表的是两种逻辑状态，而非数值的 0 和 1。

(2) **公理 2**： $0 \cdot 0 = 0$;　$1+1=1$。式中的点表示逻辑与，在用文字表述可以省略；加号表示逻辑或。

(3) **公理 3**： $1 \cdot 1 = 1$; $0+0=0$。

(4) **公理 4**： $0 \cdot 1 = 0$; $1+0=1$。$1 \cdot 0 = 0$;　$0+1=1$

(5) **公理 5**： $\bar{0}=1$； $\bar{1}=0$。

逻辑代数的运算规则

2. 逻辑代数的基本定律

	0-1律	$A \cdot 0 = 0$	$\boxed{A + 1 = 1}$
	自等律	$A + 0 = A$	$A \cdot 1 = A$
重叠律	同一律	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
	互补律	$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$

普通代数结果如何？

还原律 $\overline{\overline{A}} = A$

交换律　A·B = B·A　　A + B = B + A

结合律　A·（B·C）=（A·B）·C　　A +(B+C)=(A+B)+C

分配律　A·（B+C）=A·B + A·C　　$\boxed{A+(BC)=(A+B)(A+C)}$

2. 逻辑代数的基本定律

证明：

$$
\begin{aligned}
A+(BC) &= A(1+B+C)+BC && \text{利用0-1律和自等律} \\
&= A+AB+AC+BC && \text{利用乘对加的分配律} \\
&= AA+AB+AC+BC && \text{利用重叠律} \\
&= A(A+B)+C(A+B) && \text{利用乘对加的分配律} \\
&= (A+B)(A+C) && \text{利用乘对加的分配律}
\end{aligned}
$$

逻辑代数的运算规则

2. 逻辑代数的基本定律

反演律(摩根定律)： $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$; $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

证明(真值表)：

A	B	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

3. 逻辑代数的基本规则

（1）代入规则

在任何一个逻辑等式（如$F=W$）中，如果将等式两端的某个变量（如B）都以一个逻辑函数（如$Y=BC$）代入，则等式仍然成立。这个规则就叫代入规则。

$$\boxed{\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}}$$

$Y=BC$

$$\overline{AY}=\overline{A}+\overline{Y}$$

$$\overline{A(BC)}=\overline{A}+\overline{BC}$$

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

逻辑代数的运算规则

3. 逻辑代数的基本规则

（2）反演规则

对任何一个逻辑表达式Y 作反演变换，可得Y 的反函数 $\overline{Y}$ 。这个规则叫做反演规则。

反演变换：

"$\cdot$"→"$+$"

"$+$"→"$\cdot$"

"0" → "1"

"1" →"0",

原变量→反变量

反变量→原变量

$$Y = \overline{A} + \overline{B} + CD + 0$$

$$\overline{Y} = A \cdot B \cdot (\overline{C} + \overline{D}) \cdot 1$$

$$Y = A + \overline{B + \overline{C} + \overline{D + E}}$$

$$\overline{Y} = \overline{A} \cdot \overline{\overline{B} \cdot C \cdot \overline{\overline{D} \cdot \overline{E}}}$$

$$\overline{Y} = \overline{A} \cdot (B + \overline{C} + \overline{D + E})$$

运算的优先顺序：先括号、再相与，最后或。

运用反演规则时，要注意**变量运算顺序**不变！必要时可加或减扩号。

逻辑代数的运算规则

3. 逻辑代数的基本规则

（2）反演规则

【例】 已知逻辑函数$F=A+\bar{B}(\bar{C}D+\bar{E}+0)$，试求其反函数。

解：

$$\bar{F}=\overline{A+\bar{B}(\bar{C}D+\bar{E}+0)}=\bar{A}\cdot\overline{\bar{B}(\bar{C}D+\bar{E}+0)}=\bar{A}\cdot(B+\overline{\bar{C}D+\bar{E}+0})$$

$$=\bar{A}\cdot(B+(C+\bar{D})\cdot E\cdot 1)=\bar{A}\cdot(B+CE+\bar{D}E)=\bar{A}B+\bar{A}CE+\bar{A}\bar{D}E$$

逻辑代数的运算规则

3. 逻辑代数的基本规则

（2）反演规则

【例】 已知 $F=\bar{A}+\overline{B+\bar{C}\cdot\overline{\bar{D}+E}}$，求 $\bar{F}$

不属于单个变量上的反号下面的函数当一个变量处理！

解：

$$\bar{F}=\overline{\bar{A}+\overline{\overline{B+\bar{C}\bullet\overline{\bar{D}+E}}}}=A\bullet\overline{\overline{\overline{B+\bar{C}\bullet\overline{\bar{D}+E}}}}=A\bullet\overline{\bar{B}\bullet\overline{\overline{\bar{C}\bullet\overline{\bar{D}+E}}}}=A\bullet\overline{\bar{B}\bullet(C+\overline{\overline{\bar{D}+E}})}$$

$$=A\bullet\overline{\bar{B}\bullet(C+\overline{\bar{D}\bullet\bar{\bar{E}}})}=A\bullet\overline{\bar{B}\bullet(C+\bar{D}+E)}=A\bullet(B+\overline{C+\bar{D}+E})=A\bullet(B+\bar{C}D\bar{E})$$

$$=AB+A\bar{C}D\bar{E}$$

3. 逻辑代数的基本规则

（3）对偶规则　　对任何一个逻辑表达式F 作对偶变换，可得Y 的对偶式 F*。

对偶变换：

“ . ”→“ + ”

“ + ”→“ . ”

“0” → “1”

“1” →“0”

$$Y = A\overline{B} + A(C+0)$$

$$Y^{*} = (A+\overline{B})(A+C\cdot 1)$$

运用对偶规则时，同样应注意运算的优先顺序，必要时可加或减扩号。

逻辑代数的运算规则

3. 逻辑代数的基本规则

（3）对偶规则

【例】 已知 $F = A\overline{B} + CD$ ，求$\boldsymbol{F^*}$。

解： $F^* = (A + \overline{B})(C + D)$

【例】 已知 $F = \overline{A \bullet \overline{\overline{B} + \overline{C} \bullet D}}$ ，求$\boldsymbol{F^*}$。

解： $F^* = \overline{A + \overline{\overline{B} \bullet (\overline{C} + D)}}$

性质1：若$\boldsymbol{F}$（$\boldsymbol{A,B,C,\cdots}$）=$\boldsymbol{G}$（$\boldsymbol{A,B,C,\cdots}$），则 $\boldsymbol{F^*=G^*}$
性质2：（$\boldsymbol{F^*}$）*= $\boldsymbol{F}$

逻辑代数的运算规则

3. 逻辑代数的基本规则

（3）对偶规则

利用性质1，可以使公式数目减少一半。

01 律	（1）$A\cdot 1=A$ （3）$A\cdot 0=0$	（2）$A+0=A$ （4）$A+1=1$
交换律	（5）$A\cdot B=B\cdot A$	（6）$A+B=B+A$
结合律	（7）$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	（8）$A+(B+C)=(A+B)+C$
分配律	（9）$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	（10）$A+(BC)=(A+B)(A+C)$
互补律	（11）$A\cdot\overline{A}=0$	（12）$A+\overline{A}=1$
重叠律	（13）$A\cdot A=A$	（14）$A+A=A$
反演律	（15）$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$	（16）$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
还原律	（17）$\overline{\overline{A}}=A$	

互为对偶式

逻辑代数的运算规则

3. 逻辑代数的基本规则

（3）对偶规则　　　自对偶函数：$F^{*}= F$

【例】证明函数 $F=(A+\overline{C})\overline{B}+A(\overline{B}+\overline{C})$ 是一自对偶函数。　分配律

证明：$F^{*}=(A\overline{C}+\overline{B})(A+\overline{B}\overline{C})=(A+\overline{B})(\overline{C}+\overline{B})(A+\overline{B})(A+\overline{C})$

$=(A+\overline{B})(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C})$　重叠律

$=A(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C})+\overline{B}(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C})$　分配律

$=(\overline{B}+\overline{C})(A+A\overline{C})+(\overline{B}+\overline{B}\overline{C})(A+\overline{C})$　分配律

$=A(\overline{B}+\overline{C})+\overline{B}(A+\overline{C})\quad =F$　提公因子并化简

逻辑代数的运算规则

4. 若干常用公式

（1）常用公式

①合并相邻项公式：

$$AB+A\overline{B}=A\ ;\qquad (A+B)(A+\overline{B})=A$$ 相邻项

证明：$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A\bullet 1=A$

②消项公式： $A+AB=A;\qquad A\cdot(A+B)=A$

证明： $A+AB=A(1+B)=A\cdot 1=A$

$$A\cdot(A+B)=AA+AB=A+AB=A(1+B)=A$$

逻辑代数的运算规则

4. 若干常用公式

（1）常用公式

③等同公式： $A+\overline{A}B=A+B;\qquad A\cdot(\overline{A}+B)=AB$

式中含反，去掉反。

证明：

$$A+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B$$

$$=A+B(A+\overline{A})=A+B$$

例如： $A+\overline{A}BC+DE=A+BC+DE$

被消去

逻辑代数的运算规则

4. 若干常用公式

（1）常用公式

④包含公式：

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

正负相对，

与全完。

证明：

$$
\begin{aligned}
&AB+\overline{A}C+BC\\
&=AB+\overline{A}C+\underbrace{(A+\overline{A})}_{1}BC\\
&=AB+\overline{A}C+\underbrace{ABC+\overline{A}BC}_{\text{吸收}}\\
&=AB+\overline{A}C
\end{aligned}
$$

4. 若干常用公式

（1）常用公式

例如：

$$AB+\overline{A}C+BCD$$

$$=AB+\overline{A}C+BC+BCD$$

$$=AB+\overline{A}C+BC$$

$$=AB+\overline{A}C$$

注. A+B=A+C ⇏ B=C 逻辑加与代数加不同

如A=B=1，C=0

注. AB=AC ⇏ B=C 逻辑乘与代数乘不同

如A=C=0，B=1

逻辑代数的运算规则

4. 若干常用公式

（2）异或、同或公式

序号	异或公式	同或公式
1	$A\oplus 0=A$	$A\odot 1=A$
2	$A\oplus 1=\overline{A}$	$A\odot 0=\overline{A}$
3	$A\oplus A=0$	$A\odot A=1$
4	$A\oplus \overline{A}=1$	$A\odot \overline{A}=0$
5	$A\oplus B=B\oplus A$	$A\odot B=B\odot A$
6	$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$	$(A\odot B)\odot C=A\odot(B\odot C)$
7	$A(B\oplus C)=AB\oplus AC$	$A+(B\odot C)=(A+B)\odot(A+B)$
8	$\overline{A\oplus B}=\overline{A}\odot\overline{B}$	$\overline{A\odot B}=\overline{A}\oplus\overline{B}$
9	$A\oplus\overline{B}=\overline{A}\oplus B=\overline{A\oplus B}$	$A\odot\overline{B}=\overline{A}\odot B=\overline{A\odot B}$
10	$A\oplus A\oplus A\oplus\cdots\oplus A=\begin{cases}0 & (A\text{的个数为偶数})\\ A & (A\text{的个数为奇数})\end{cases}$	

- 2.1 逻辑代数的基本运算
- 2.2逻辑代数的运算规则
- **2.3 逻辑函数表述方法**
- 2.4 逻辑函数的标准形式
- 2.5逻辑函数的化简方法

逻辑函数表述方法

1.逻辑函数的表示方法

（1） 真值表

输入变量 A B C····	输出 Y_1 Y_2····
遍历所有可能的输入变量的取值组合	输出对应的取值

【例】列出函数$Y=AB+BC+CA$的真值表。

A	B	C	Y

逻辑函数表述方法

1.逻辑函数的表示方法

（2）逻辑表达式表述

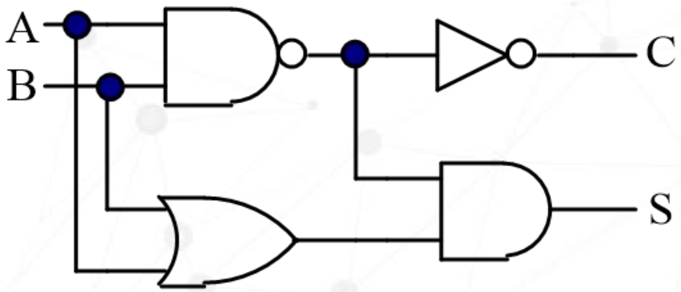
将输入/输出之间的逻辑关系用与/或/非的运算式表示就得到逻辑式。

$$F(A,B,C,D)=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D$$

（3）逻辑图表述

用逻辑图形符号表示逻辑运算关系，与逻辑电路的实现相对应。

【例】 分析下图的逻辑功能。



解：

$$S(A,B)=(A+B)\overline{AB}$$

$$C(A,B)=\overline{\overline{AB}}=AB$$

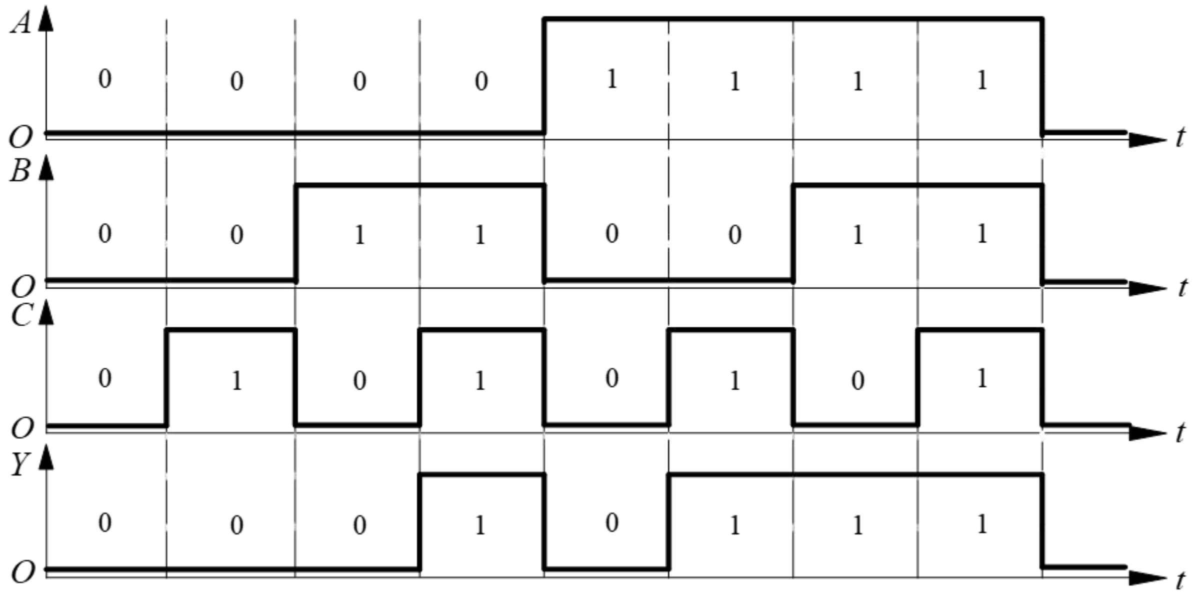
二进制半加器

逻辑函数表述方法

1.逻辑函数的表示方法

（4）波形图表述

波形图（Waveform），又称时序图（Timing diagram），是将逻辑函数的输出值与输入变量每一种可能出现的取值按时间顺序依次画成线段的图形。



2.真值表与逻辑表达式的相互转换

（1）逻辑表达式 真值表

将函数输入变量的各种组合状态逐一代入逻辑表达式求出函数值，然后列成表，即可得到真值表。

（2）真值表 逻辑表达式

【例】 三输入变量的奇数个“1”判别函数的真值表如表所示，试写出它的逻辑表达式。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

解：

$$F=0\cdot\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+1\cdot\overline{A}\,\overline{B}C+1\cdot\overline{A}B\overline{C}+0\cdot\overline{A}BC+1\cdot A\overline{B}\,\overline{C}+0\cdot A\overline{B}C+0\cdot AB\overline{C}+1\cdot ABC$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$$

逻辑函数表述方法

3. 逻辑表达式的常用形式

$$F = AB + \bar{A}C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{与或式}$$

$$= (\bar{A} + B)(A + C) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{或与式}$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\bar{A}C}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{与非-与非式}$$

$$= \overline{\overline{\bar{A} + B} + \overline{A + C}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{或非-或非式}$$

$$= \overline{A\bar{B} + \bar{A}\bar{C}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{与或非式}$$

1. 将与或式两次求对偶可得或与式，反之亦然；

2. 将与或式两次求反，运用反演律去掉内层非号可得与非-与非式；

3. 将或与式两次求反，运用反演律去掉内层非号可得或非-或非式，并进一步转换为与或非式。

- 2.1 逻辑代数的基本运算
- 2.2逻辑代数的运算规则
- 2.3 逻辑函数表述方法
- **2.4 逻辑函数的标准形式**
- 2.5逻辑函数的化简方法

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(1)最小项

最小项之和　　　　最大项之积

最小项：设有n个变量，它们所组成的具有n个变量的与项中，每个变量以原变量或反变量的形式出现一次，且仅出现一次，则这个乘积项称为最小项。

最小项 m：

- 包含n个因子；
- m是个乘积项；
- n个变量均以原变量或反变量的形式在m中出现一次。

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(1)最小项

最小项之和

对于n变量函数
有2^n个最小项

- 两变量*A*, *B*的最小项

$$\bar{A}\bar{B},\quad \bar{A}B,\quad A\bar{B},\quad AB\quad (2^2=4\text{个})$$

- 三变量*A*,*B*,*C*的最小项

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C},\quad \bar{A}\bar{B}C,\quad \bar{A}B\bar{C},\quad \bar{A}BC\quad A\bar{B}\bar{C},\quad A\bar{B}C,\quad AB\bar{C},\quad ABC\quad (2^3=8\text{个})$$

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(1)最小项

最小项常用符号m_i表示，其中m表示最小项，下标i是最小项的编号。i是能使最小项为1的那组变量取值的二进制数的十进制值。

最小项	取 值 A B C	对应十进制数	编号
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0 0 0	0	m_0
$\bar{A}\bar{B}C$	0 0 1	1	m_1
$\bar{A}B\bar{C}$	0 1 0	2	m_2
$\bar{A}BC$	0 1 1	3	m_3
$A\bar{B}\bar{C}$	1 0 0	4	m_4
$A\bar{B}C$	1 0 1	5	m_5
$AB\bar{C}$	1 1 0	6	m_6
ABC	1 1 1	7	m_7

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(1) 最小项

最小项的性质

- n变量的全部最小项之逻辑和为1，即：$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
- 任意两个不同的最小项的逻辑积为0，即：$m_i \cdot m_j = 0\ (i \neq j)$
- n变量的每个最小项有n个逻辑相邻项。

逻辑相邻项：除了一个变量不同外，其余变量均相同的最小项。

如，三变量的最小项 $A\bar{B}C$ 有3个逻辑相邻项：

$\bar{A}\bar{B}C$　　ABC　　$A\bar{B}\bar{C}$

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(2)最大项

最大项：n变量的最大项是n个变量的“或项”，其中每个变量以原变量或反变量的形式出现一次，且仅出现一次。

- M是相加项；
- 包含n个因子；
- n个变量均以原变量和反变量的形式在M中出现一次。

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(2) 最大项

最大项：

对于n变量函数
有2^n个

两变量A，B的最大项：

$$\overline{A}+\overline{B},\ \ \overline{A}+B,\ \ A+\overline{B},\ \ A+B\quad (2^2=4)$$

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(2) 最大项

最大项常用符号M_i表示，其中M表示最大项，下标i是最大项的编号。i是能使最大项为0的那组变量取值的二进制数的十进制值。

最大项	取值 A B C	对应十进制数	编号
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	1 1 1	7	M_7
$\overline{A}+\overline{B}+C$	1 1 0	6	M_6
$\overline{A}+B+\overline{C}$	1 0 1	5	M_5
$\overline{A}+B+C$	1 0 0	4	M_4
$A+\overline{B}+\overline{C}$	0 1 1	3	M_3
$A+\overline{B}+C$	0 1 0	2	M_2
$A+B+\overline{C}$	0 0 1	1	M_1
$A+B+C$	0 0 0	0	M_0

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

3变量逻辑函数的最小项和最大项

十进制数 i	A	B	C	最小项	m_i	最大项	M_i
0	0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1	$A+B+\bar{C}$	M_1
2	0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2	$A+\bar{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$\bar{A}BC$	m_3	$A+\bar{B}+\bar{C}$	M_3
4	1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4	$\bar{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$A\bar{B}C$	m_5	$\bar{A}+B+\bar{C}$	M_5
6	1	1	0	$AB\bar{C}$	m_6	$\bar{A}+\bar{B}+C$	M_6
7	1	1	1	ABC	m_7	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	M_7

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

最小项与最大项的关系：

相同编号的最小项和最大项存在互补关系

即：　$\mathbf{m_i} = \overline{\mathbf{M_i}}$　　$\mathbf{M_i} = \overline{\mathbf{m_i}}$

$$m_2 = \overline{M_2} \qquad M_2 = \overline{m_2}$$

如：$\bar{A}B\bar{C} = \overline{A + \bar{B} + C}$　　如：$A + \bar{B} + C = \overline{\bar{A}B\bar{C}}$

逻辑函数的标准形式

1. 最小项和最大项

(2) 最大项

最大项的性质

(1) n 变量的全部最大项之逻辑积为 0，即：$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$。

(2) 任意两个不同的最大项的逻辑和为 1，即：$M_i + M_j = 1 (i \neq j)$。

(3) n 变量的每个最大项有 n 个逻辑相邻项。例如，三变量的最大项 $\overline{A} + B + \overline{C}$ 有 3 个逻辑相邻项：$A + B + \overline{C}$、$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$、$\overline{A} + B + C$。

逻辑函数的标准形式

2.标准与或式—最小项表达式

在一个与或式中，所有的与项均为最小项，则称这种表达式为标准与或式，或称为最小项表达式、最小项之和形式。

例：将$F(A,B,C,D)=AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{D}$ 写成最小项表达式。

利用公式 $A+\overline{A}=1$

解：$F(A,B,C,D)=AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{D} \quad =AB\overline{C}(D+\overline{D})+\overline{A}\overline{B}\overline{D}(C+\overline{C})$

$$=AB\overline{C}D+AB\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

$$=m_{13}+m_{12}+m_2+m_0=\sum m(0,2,12,13)$$

逻辑函数的标准形式

2.标准与或式—最小项表达式

【例】已知F的真值表如表所示，试写出F的最小项表达式。

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

解：当A，B，C取值分别为000、010、011、111时，F为1，最小项表达式由这四种组合所对应的最小项进行相或构成，可表示为：

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+ABC=\sum m(0,2,3,7)$$

逻辑函数的标准形式

2.标准与或式—最小项表达式

例： 求函数$F(A，B，C)=\overline{A+\overline{B}}+\overline{A}\,\overline{B}C$ 的标准与或表达式。

解：$F(A，B，C)=\overline{A+\overline{B}}+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}\cdot B+\overline{A}\,\overline{B}C$

$$=\overline{A}B(C+\overline{C})+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$

$$=m_3+m_2+m_1=\sum m(1,\ 2,\ 3)$$

逻辑函数的标准形式

3.标准或与式—最大项表达式

在一个或与式中，所有的或项均为最大项，则称这种表达式为标准或与式，或称为最大项表达式、最大项之和形式。

转换方法：

1)、把表达式变换成或与式（利用公式）；

2)、利用基本公式 $A\cdot\overline{A}=0$ 把或项中缺少的变量补齐；

3)、利用基本公式 $A+BC=(A+B)(A+C)$ 展开成最大项表达式。

3.标准或与式—最大项表达式

【例】将 $F(A,B,C)=AB+AC$ 写成最大项表达式。

解：

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= AB+AC=(AB+A)(AB+C)\\
&=(A+A)(A+B)(A+C)(B+C)\\
&=A(A+B)(A+C)(B+C)\\
&=(A+B\bar{B}+C\bar{C})(A+B+C\bar{C})(A+B\bar{B}+C)(A\bar{A}+B+C)\\
&=(A+\bar{B}+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(A+B+\bar{C})(A+B+C)(\bar{A}+B+C)\\
&=M_3\cdot M_2\cdot M_1\cdot M_0\cdot M_4\\
&=\prod M(0,1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

逻辑函数的标准形式

3.标准或与式—最大项表达式

【例】已知F的真值表如表所示，试写出F的最大项表达式。

A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

解：1. 从真值表中写出F和 $\overline{F}$的最小项表达式为：

$$F=\sum m(2,4,6,7) \qquad \overline{F}=m_0+m_1+m_3+m_5$$

2. 将 $\overline{F}$求反可得到F的最大项表达式为：

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{m_0+m_1+m_3+m_5}=\overline{m_0}\bullet\overline{m_1}\bullet\overline{m_3}\bullet\overline{m_5}$$

$$=M_0\bullet M_1\bullet M_3\bullet M_5=\prod M(0,1,3,5)$$

逻辑函数的标准形式

3.标准或与式—最大项表达式

若 $F(A,B,C)=\sum m(1,3,5,7)$ 则 $\overline{F}=\sum m(?)=\prod M(?)$

- 若干个最小项之和表示的表达式***F***，其反函数***F***可用等同个与这些最小项相对应的最大项之积表示。

例：

$$F = m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\overline{F} = \overline{m_1 + m_3 + m_5 + m_7}$$

$$= \overline{m}1 \cdot \overline{m}3 \cdot \overline{m}_5 \cdot \overline{m}_7$$

$$= M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7$$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

- 公式法化简：利用逻辑代数中的公式和定理进行化简。
- 图形化简法：采用卡诺图进行化简。

(1) 并项法

利用公式 $\boxed{A+\overline{A}=1}$，将两相邻项合并成一项，并消去互补变量。

【例】化简 $F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC$

解1：

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}$$

解2：

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}$$

$$=\overline{A}(\overline{B}\,\overline{C}+BC)+\overline{A}(\overline{B}C+B\overline{C})$$

$$=\overline{A}(B\odot C)+\overline{A}(B\oplus C)$$

$$=\overline{A}(\overline{B\oplus C}+B\oplus C)=\overline{A}$$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(1) 并项法

利用公式 $\boxed{A+\overline{A}=1}$，将两相邻项合并成一项，并消去互补变量

【例】 化简 $F = A\overline{B}C + AB + A\overline{C}$

解：$F = A\overline{B}C + AB + A\overline{C} = A\overline{B}C + A(B+\overline{C}) = A\overline{B}C + A\overline{\overline{B}C} = A$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(2)吸收法

利用公式$\boxed{A+AB=A}$和$\boxed{A+\overline{A}B=A+B}$，消去多余的项。

【例】化简 $F=A\overline{B}+A\overline{B}\,\overline{C}D(E+\overline{F})$

解：$F=A\overline{B}(1+\overline{C}D(E+\overline{F}))=A\overline{B}$

【例】化简 $F=A+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{D}$

解：$F=A+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{D}=A+B\overline{C}D+\overline{D}=A+B\overline{C}+\overline{D}$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(2)吸收法

利用公式$\boxed{A+AB=A}$和$\boxed{A+\overline{A}B=A+B}$，消去多余的项。

【例】 化简 $F=AB+\overline{C}+\overline{A}CD+\overline{B}CD$

解：$F=AB+\overline{C}+\overline{A}CD+\overline{B}CD=AB+\overline{C}+CD(\overline{A}+\overline{B})$

$=AB+\overline{C}+D(\overline{A}+\overline{B})=AB+\overline{C}+\overline{AB}D$

$=AB+\overline{C}+D$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(3)配项法

方法一： 利用公式 $A+\overline{A}=1$，给某一个与项配项，然后将其拆分成两项，再与其它项合并。

【例】 化简 $F=A\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+B\overline{C}$

解：
$$
\begin{aligned}
F &= A\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+B\overline{C}=A\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+(A+\overline{A})B\overline{C} \\
&= A\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}=A\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+AB\overline{C} \\
&= A\overline{B}+(\overline{A}+AB)\overline{C}=A\overline{B}+(\overline{A}+B)\overline{C} \\
&= A\overline{B}+(\overline{A\overline{B}})\overline{C}=A\overline{B}+\overline{C}
\end{aligned}
$$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(3)配项法

方法一： 利用公式 $A+\overline{A}=1$，给某一个与项配项，然后将其拆分成两项，再与其它项合并。

【例】 化简 $F=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$

解：$F=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B=A\overline{B}+B\overline{C}+(A+\overline{A})\overline{B}C+(C+\overline{C})\overline{A}B$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C(B+\overline{B})=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C$$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(3)配项法

方法二：利用 $\boxed{A+A=A}$，重复使用某一项，反而有利于化简。

【例】化简 $F=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+ABC$

解：$F=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+ABC$

$=(\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}C)+(A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C)+(A\bar{B}C+ABC)$ 重复使用 $A\bar{B}C$

$=\bar{B}C+A\bar{B}+AC$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(4) 消项法

利用公式 $\boxed{AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C}$，将冗余项**BC**消去。

【例】 化简 $F=A\bar{C}+\bar{A}\bar{D}+\bar{B}\bar{D}+BC$

解：$F=A\bar{C}+\bar{A}\bar{D}+\bar{B}\bar{D}+BC=A\bar{C}+BC+(\bar{A}+\bar{B})\bar{D}$

$$=A\bar{C}+BC+AB+\overline{AB}\bar{D}=A\bar{C}+BC+AB+\bar{D}$$

$$=A\bar{C}+BC+\bar{D}$$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

(4) 消项法

利用公式 $\boxed{AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C}$，将冗余项**BC**消去。

【例】 化简 $F=A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{C}(DEF+\overline{G}H)$

解：$F=A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{C}(DEF+\overline{G}H)$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{C}+A\overline{C}(DEF+\overline{G}H)=A\overline{B}+B\overline{C}$$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

（5）综合法

【例】 化简 $F = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD + ACEF + \overline{B}EF + DEFG$

解： $F = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD + ACEF + \overline{B}EF + DEFGH$

$= A + AB + \overline{A}C + BD + ACEF + \overline{B}EF + DEFGH$

$= A + \overline{A}C + BD + ACEF + \overline{B}EF + DEFGH$

$= A + C + BD + ACEF + \overline{B}EF + DEFGH$

$= A + C + BD + \overline{B}EF + DEF + DEFGH$

$= A + C + BD + \overline{B}EF$

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

（5）综合法

【例】化简 $F=(B+\overline{C})(A+B+\overline{C}+G)(C+\overline{D})(\overline{C}+E)(\overline{D}+E+G)$

解：（1）先求出F 的对偶函数，并对其进行化简：

$$F^{*}=B\overline{C}+AB\overline{C}G+C\overline{D}+\overline{C}E+\overline{D}EG \qquad \text{一次对偶}$$

$$=B\overline{C}+C\overline{D}+\overline{C}E \qquad \text{化简}$$

（2）求 F^{*} 的对偶函数，便得F的最简或与表达式：

$$F=(F^{*})^{*}=(B\overline{C}+C\overline{D}+\overline{C}E)^{*} \qquad \text{二次对偶}$$

$$=(B+\overline{C})(C+\overline{D})(\overline{C}+E)$$

逻辑函数的化简方法

【例】化简逻辑函数 $Y = AB + A\bar{C} + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F+G)$

解：$Y = A\overline{\bar{B}C} + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F+G)$（利用反演律）

$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F+G)$（利用 $A + \bar{A}B = A + B$）

$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B$（利用$A+AB=A$）

$= A + \bar{B}C(D+\bar{D}) + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B(C+\bar{C})$（配项法）

$= A + \bar{B}CD + \bar{B}C\bar{D} + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}BC + \bar{D}B\bar{C}$

$= A + \bar{B}C\bar{D} + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}BC$（利用$A+AB=A$）

$= A + C\bar{D}(\bar{B}+B) + \bar{C}B + \bar{B}D$

$= A + C\bar{D} + \bar{C}B + \bar{B}D$（利用 $A + \bar{A} = 1$）

逻辑函数的化简方法

1.代数化简法

优点：不受变量数目的限制。

缺点：没有固定的步骤可循；需要熟练运用各种公式和定理；在化简一些较为复杂的逻辑函数时还需要一定的技巧和经验；有时很难判定化简结果是否最简。

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（1）卡诺图的构成

•**实质：将逻辑函数的最小项之和的形式以图形的方式表示出来。**

•以2^n个小方块分别代表 n 变量的所有最小项，并将它们排列成矩阵，而且使**几何位置相邻**的两个最小项在**逻辑上也是相邻的**（只有一个变量不同），就得到表示n变量全部最小项的卡诺图。

优点：直观，便于化简

缺点：适用于变量少的逻辑函数

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

格雷码排列

（1）卡诺图的构成

● 三变量卡诺图

AB \ C	0	1
00	m_0	m_1
01	m_2	m_3
11	m_6	m_7
10	m_4	m_5

● 四变量的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

● 五变量卡诺图

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（1）卡诺图的构成

另一种形式卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（1）卡诺图的构成

卡诺图特点：

（1）每当变量数增加一个，卡诺图的方格数就会扩大一倍。

（2）变量取值按格雷码顺序排列，以确保各相邻行（列）之间只有一个变量取值不同，保证了卡诺图中任何几何位置相邻的两个最小项都是逻辑相邻项。

几何位置相邻：

（1）相接，即紧挨着；

（2）相对，即任意一行或一列的两头；

（3）相重，即对折起来位置重合。

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（2）逻辑函数的卡诺图表示

1)标准与或式的卡诺图表示

直接将表达式的“最小项”所对应的方格标以1，其余的方格填0.

2)标准或与式的卡诺图表示

直接将表达式的“最大项”所对应的方格标以0，其余的方格填1.

3)其它形式函数的卡诺图表示

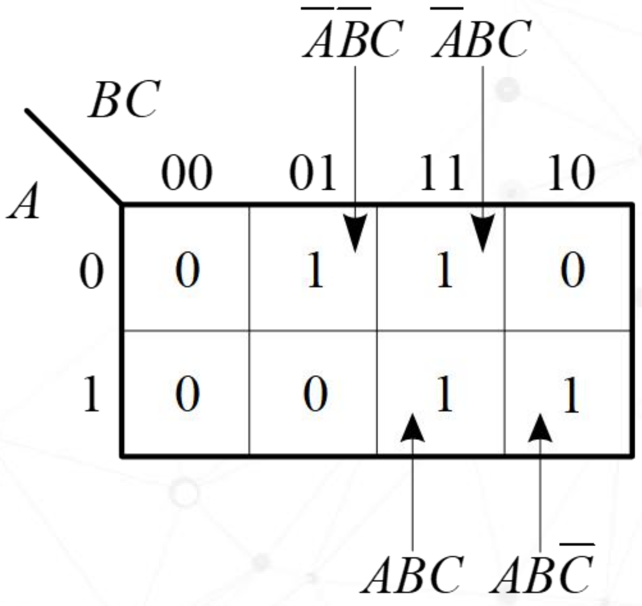
转换成最小项或最大项表达式，再在卡诺图上表示。

2.卡诺图化简法

（2）逻辑函数的卡诺图表示

【例】用卡诺图表示逻辑函数：$F(A,B,C)=\sum m$（1, 3, 6, 7）

解：函数F是最小项表达式，直接在F的卡诺图中将m_1、m_3、m_6、m_7处填1，其余填0。



2.卡诺图化简法

（2）逻辑函数的卡诺图表示

【例】用卡诺图表示逻辑函数：$F=\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}BC+A\bar{B}+D$

解：函数F为一般与或式，应先将函数F转化最小项表达式。

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$：当 $ABCD=0001$ 时，该与项为1，即对应的最小项是 m_1；

$\bar{A}BC$：当 $ABCD=011\times$（$\times$表示可以为0，也可以为1）时，该与项为1，即对应的最小项是 m_6 和 m_7；

$A\bar{B}$：当 $ABCD=10\times\times$时，该与项为1，即对应的最小项是 m_8、m_9、m_{10} 和 m_{11}；

D：当 $ABCD=\times\times\times1$ 时，该与项为1，即对应的最小项是 m_1、m_3、m_5、m_7、m_9、m_{11}、m_{13} 和 m_{15}。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

$$F=\sum m(1,3,5,6,7,8,9,10,11,13,15)$$

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（2）逻辑函数的卡诺图表示

【例】用卡诺图表示逻辑函数：$F(A,B,C,D)=\prod M(1,3,5,6,9,11,14,15)$

解：函数F是最大项表达式，直接在F的卡诺图中将M_1、M_3、 M_5、 M_6、M_{11} 、M_{14}、M_{15}处填0，其余填1。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	1	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（2）逻辑函数的卡诺图表示

【例】用卡诺图表示逻辑函数：$F(A,B,C)=(A+B+C)(A+\overline{B})(\overline{A}+C)$

解：函数F为一般或与式，应先将函数F转化最大项表达式。

$A+B+C$：当 $ABC=000$ 时，该或项为 0，即对应的最大项是 M_0；
$A+\overline{B}$：当 $ABC=01\times$ 时，该与项为 0，即对应的最小项是 M_2 和 M_3；
$\overline{A}+C$：当 $ABC=1\times0$ 时，该与项为 0，即对应的最小项是 M_4 和 M_6。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$F=\prod M(0,2,3,4,6)$$

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（2）逻辑函数的卡诺图表示

【例】用卡诺图表示逻辑函数：$F=\bar{A}\bar{D}+\bar{B}C$

解：1)在变量A、D取值均为00的所有方格中填入1；

2)在变量B、C取值分别为0、1的所有方格中填入1；

3)其余方格中填入0。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

逻辑函数的化简方法

【例】用卡诺图表示逻辑函数

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{D} + ACD + A\overline{B}$$

解： 首先将Y化为最小项之和的形式

$$\begin{aligned} Y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B(C+\overline{C})\overline{D} + A(B+\overline{B})CD \\ &\quad + A\overline{B}(C+\overline{C})(D+\overline{D}) \\ &= m_1 + m_4 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{15} \end{aligned}$$

逻辑函数的化简方法

$$Y = m_1 + m_4 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{15}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

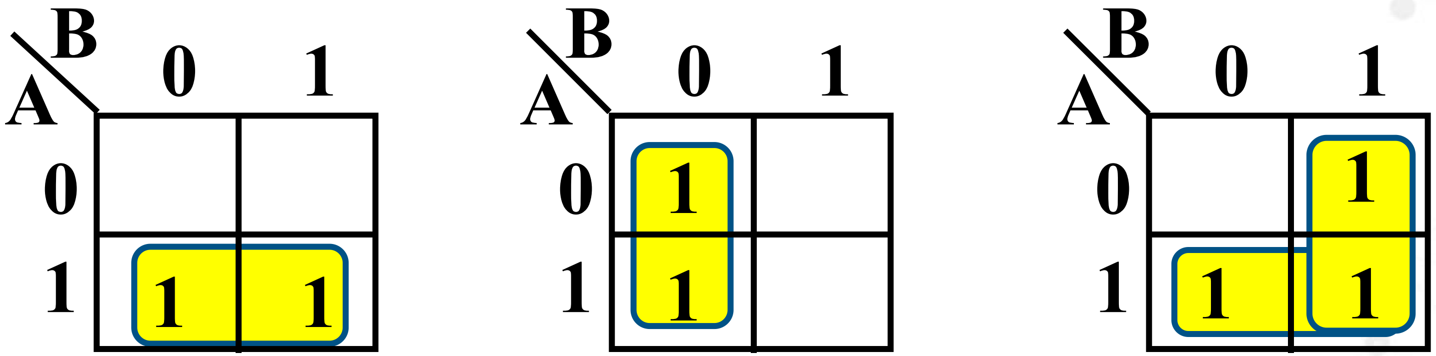
（3）最小项合并原则

- 依据：具有相邻性的最小项可合并，消去不同因子。
- 在卡诺图中，最小项的相邻性可以从图形中直观地反映出来。

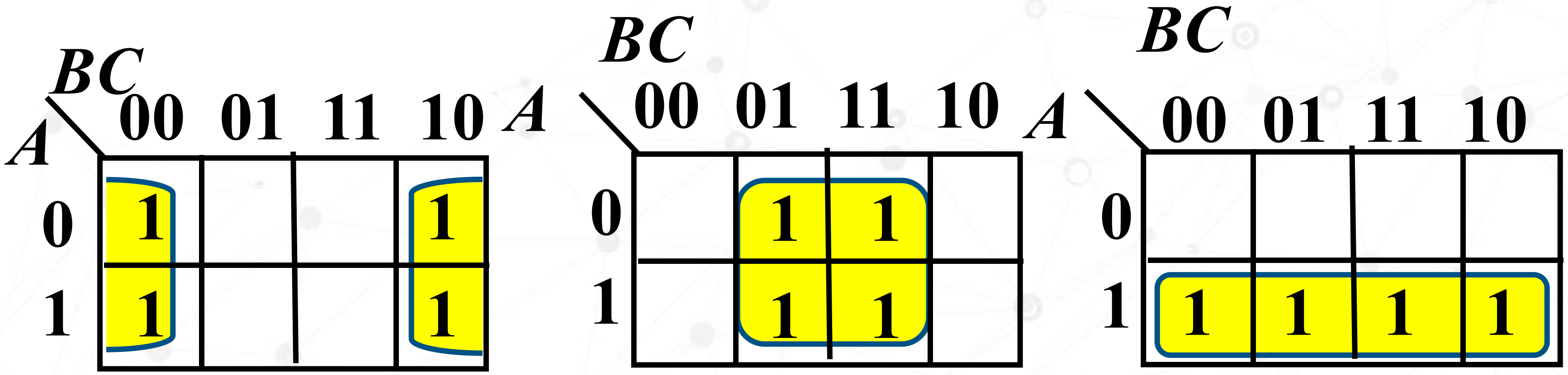
两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子；
四个排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去两对因子；
八个相邻最小项可合并为一项，消去三对因子。

逻辑函数的化简方法

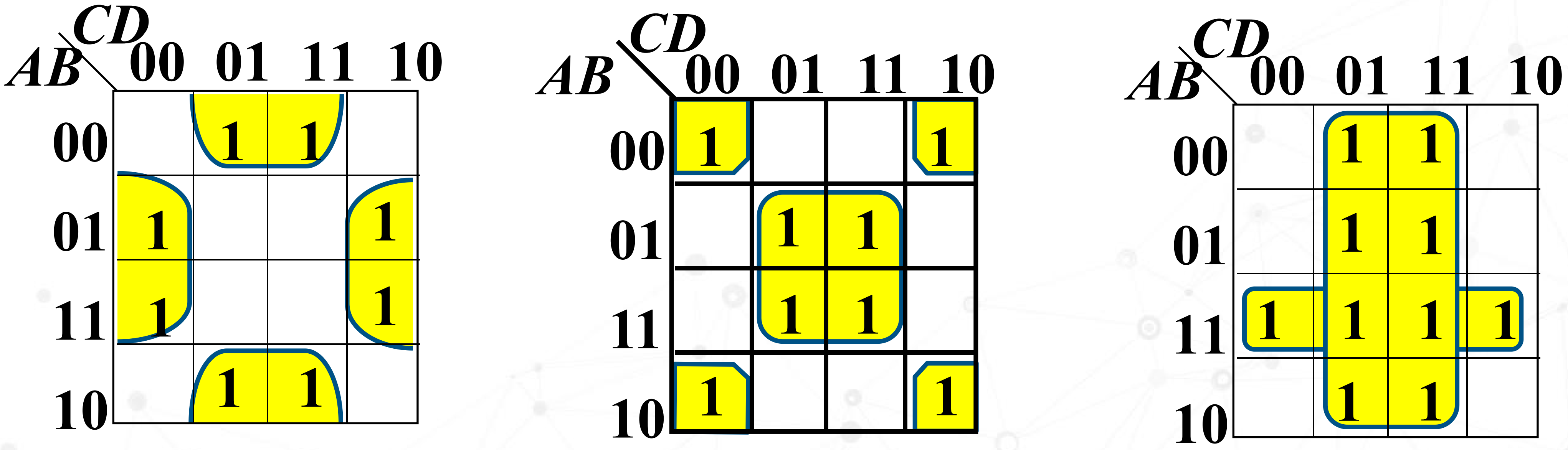
二变量卡诺图的典型画圈方式



三变量卡诺图的典型画圈方式



四变量卡诺图的典型画圈方式



逻辑函数的化简方法

❶ 若两个最小项相邻，则可合并为一项并消去一个因子，合并后的结果中只剩下公共因子。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

ACD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

ABC

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

$\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$\overline{A}B\overline{D}$

逻辑函数的化简方法

② 若四个最小项相邻并排列成一个矩形组，则可合并为一项并消去二对因子。合并后的结果中只包含公共因子。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

AD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$\overline{A}B$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

$C\overline{D}$

逻辑函数的化简方法

❷若四个最小项相邻并排列成一个矩形组，则可合并为一项并消去二对因子。合并后的结果中只包含公共因子。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$\overline{B}\,\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$B\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$\overline{B}\,\overline{C}$

逻辑函数的化简方法

❸若八个最小项相邻并排成一个矩形组，则可合并为一项并消去三对因子。合并后的结果中只包含公共因子。

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

B

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

D

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$\overline{B}$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$\overline{D}$

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

①圈1法：

对卡诺图中填“1”的相邻方格进行画圈合并，求最简与或式。

步骤：

1）画出逻辑函数的卡诺图，即填卡诺图；

2）画卡诺圈合并最小项。

3）写出最简表达式。每个圈写成一个最简与项，并将它们相或，便得到最简与或式。

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

①圈1法:画圈原则

1) 尽量画大圈，但每个圈内只能含有2^n(n=0, 1, 2, 3…)个相邻项。要特别注意对边相邻性和四角相邻性。
2) 卡诺图中所有取值为1的方格均要被圈过，即不能漏下取值为1的最小项。
3) 同一方格可以被不同的圈包围，但新增圈中一定要有新的方格，否则该圈为多余。
4) 圈尽可能大即圈内方格数尽可能多，圈的个数尽量少。

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

①圈1法：

【例】用卡诺图求出以下逻辑函数的最简与或式：

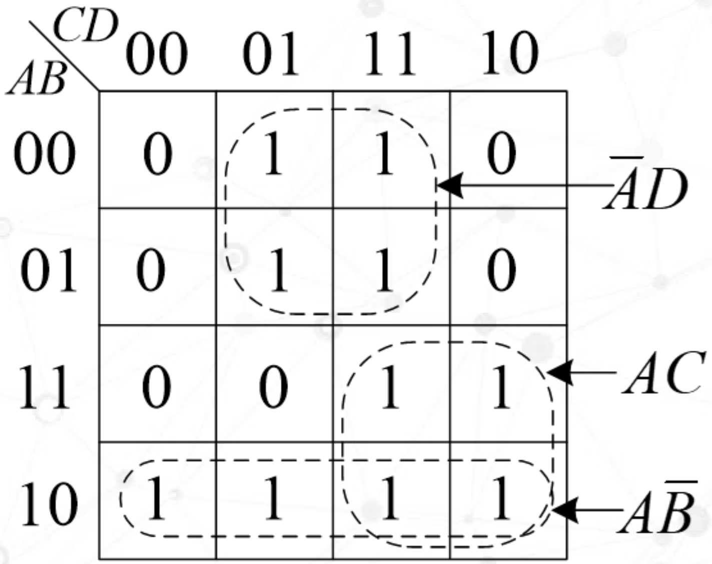
$$F(A,B,C,D)=\sum m(1,3,5,7,8,9,10,11,14,15)$$

解：1)画出该逻辑函数的卡诺图；

2)画圈；

3)写出最简式：

$$F(A,B,C,D)=\bar{A}D+AC+A\bar{B}$$



逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

①圈1法：

【例】用卡诺图求出以下逻辑函数的最简与或式：$F(A,B,C)=\overline{A}\overline{B}+A\overline{C}+BC$

解：1)画出该逻辑函数的卡诺图；

2)画圈化简函数；

3)写出最简式：

$$F(A,B,C)=\overline{A}\overline{B}+A\overline{C}+BC$$

$$F(A,B,C)=\overline{B}\overline{C}+\overline{A}C+AB$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

逻辑函数的化简方法

Are You Sure?

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

①圈1法:

【例】用卡诺图求出以下逻辑函数的最简与或式:

$$F(A,B,C,D)=AD+A\bar{B}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

解：1)画出该逻辑函数的卡诺图;

2)画圈化简函数;

3)写出最简式:

$$F=AD+\bar{B}\bar{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

$\bar{B}\bar{D}$

AD

逻辑函数的化简方法

【例】用卡诺图化简逻辑函数

$F(A,\ B,\ C,\ D)=\Sigma m(0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ 15)$

解：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

$$F=(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+BD+CD+\overline{A}BC+A\overline{B}C$$

逻辑函数的化简方法

【例】用卡诺图化简逻辑函数$F(A, B, C, D)=\Sigma m(2, 3, 8, 9, 10, 12, 13)$

解：

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	1

或

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	1

$$F = (A,B,C,D) = A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\overline{B}\,\overline{D}$$

或 $$F = (A,B,C,D) = A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{B}\,C\,\overline{D}$$

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

②圈0法：

对卡诺图中填“0”的相邻方格进行画圈合并，求最简或与式。

步骤：

1）画出逻辑函数的卡诺图，即填卡诺图；

2）画卡诺圈合并最大项。

3）写出最简表达式。每个圈写成一个最简或项，并将它们相与，便得到最简或与式。

逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

②圈0法:

【例】用卡诺图求出以下逻辑函数的最简或与式:

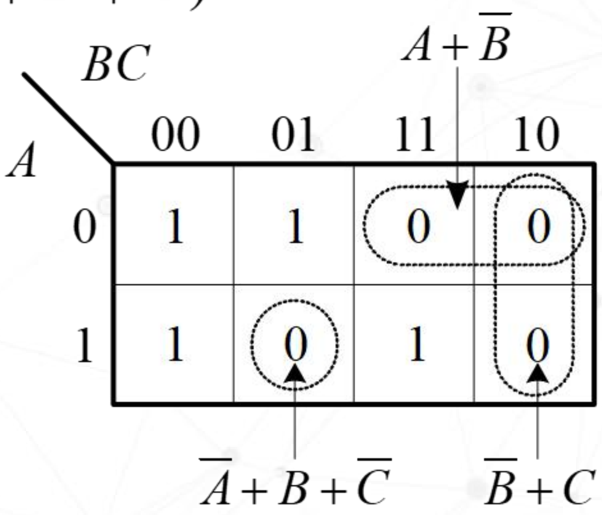
$$F=(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

解：1)画出该逻辑函数的卡诺图;

2)画圈化简函数;

3)写出最简式:

$$F=(A+\overline{B})(\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$



逻辑函数的化简方法

2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

②圈0法：

【例】用卡诺图求出以下逻辑函数的最简或与式：

$$F(A,B,C,D)=\sum m(0,1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15)$$

解：1)画出该逻辑函数的卡诺图；

2)画圈化简函数；

3)写出最简式： $F=\overline{B}+C+D$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

注意：当变量取值为1时写成反变量，取值为0时写成原变量。

逻辑函数的化简方法

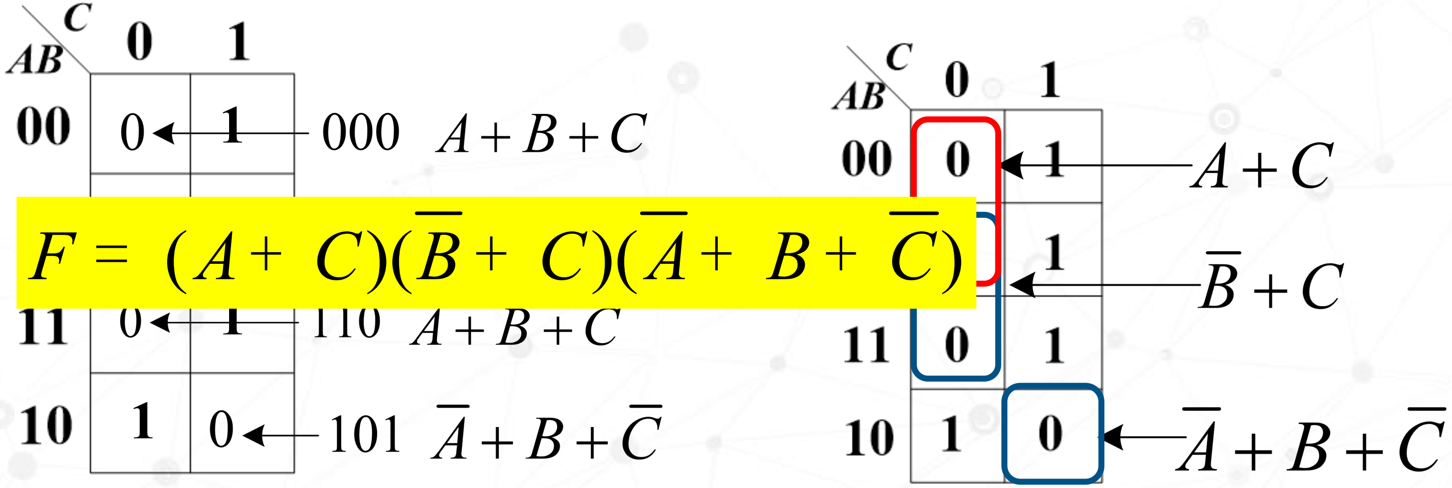
2.卡诺图化简法

（4）用卡诺图化简逻辑函数

②圈0法:

【例】用卡诺图表示下面的标准或与表达式，并将其化简为最简或与表达式:

$$F=(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$



$$F=(A+C)(\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

逻辑函数的化简方法

【例】用卡诺图把逻辑函数$F(A,\ B,\ C,\ D)=\prod M(3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,15)$化简成最简″或与″表达式。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

$$F=(\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B})(\overline{B}+D)$$

逻辑函数的化简方法

3.具有无关项的逻辑函数及其化简

- 完全描述的逻辑函数：函数的真值表中各行的输出都是明确的，非0即1。
- 非完全描述的逻辑函数：函数真值表中有些行的输出是确定了的，但还有些行的输出却不确定，可以是0，也可以是1。

这些输出不确定的行，所对应的函数最小项或最大项，称为无关项。

（1）**约束项：** 由于某些条件限制或约束，逻辑问题中不允许输入变量的某些取值组合出现，这些取值组合所对应的最小项称为约束项。

（2）**任意项：** 在输入变量的某些取值组合下，其函数值为0或为1是无所谓的，并不影响逻辑问题的实质。这些取值组合所对应的最小项称为任意项。

逻辑函数的化简方法

3.具有无关项的逻辑函数及其化简

含无关项的逻辑函数表示：

$$\begin{cases} F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + ABC \\ \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B} = 0 \end{cases}$$

$F = \sum m(0,1,7) + \sum d(2,4,5)$ 或 $F = \prod M(3,6) \cdot \prod d(2,4,5)$

逻辑函数的化简方法

3.具有无关项的逻辑函数及其化简

【例】化简下列函数：

$$F(A,B,C,D)=\sum m(3,4,11)+\sum d(0,7,8,12,13,14,15)$$

解：

1) 画出该逻辑函数的卡诺图，最小项对应的方格填1，无关项对应的方格填×，其余方格填0。

2) 画圈化简函数，无关项对化简有利，则取1，否则取0。

3) 写出最简式：$F=\bar{C}\bar{D}+CD$

AB \ CD	00	01	11	10
00	×	0	1	0
01	1	0	×	0
11	×	×	×	×
10	×	0	1	0

逻辑函数的化简方法

3.具有无关项的逻辑函数及其化简

【例】将以下逻辑函数化简为最简与或非式：$\begin{cases} F=\sum m(0,1,2,9) \\ \overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}=0 \end{cases}$

解：

1)画出该逻辑函数的卡诺图。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	×	×	0	0
11	0	0	0	0
10	×	1	0	0

2)画圈化简函数，采用圈0法，得到最简与或式：

$$\overline{F}=B+CD+AC$$

3)将F转换为最简与或非式：

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{B+CD+AC}$$

3.具有无关项的逻辑函数及其化简

【例】化简下列函数：

$$F(A,B,C,D)=\sum m(0,3,4,7,11)+d(8,9,12,13,14,15)$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	×	×	×	×
10	×	×	1	0

$\overline{C}\,\overline{D}$　　CD

$$F=\overline{C}\,\overline{D}+CD$$

逻辑函数的化简方法

3.具有无关项的逻辑函数及其化简

【例】化简函数 $F=\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}CD+A\overline{B}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

已知约束条件为：$AD+BC=0$

解：将约束条件变换为最小项之和的形式：

$$AD+BC=A(B+\overline{B})(C+\overline{C})D+(A+\overline{A})BC(D+\overline{D})$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=ABCD+ABC\overline{D}... \end{aligned}}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	X	X
11	0	X	X	X
10	1	X	X	1

无关项

$$d(6,7,9,11,13,14,15)=0$$

$$F=C+\overline{B}\,\overline{D}$$

4.多输出函数的化简

由同一组输入变量产生多个输出函数，化简时找出各输出函数的公用项，以便在逻辑电路中实现对公用项逻辑部件的共享，从而使电路整体最简。

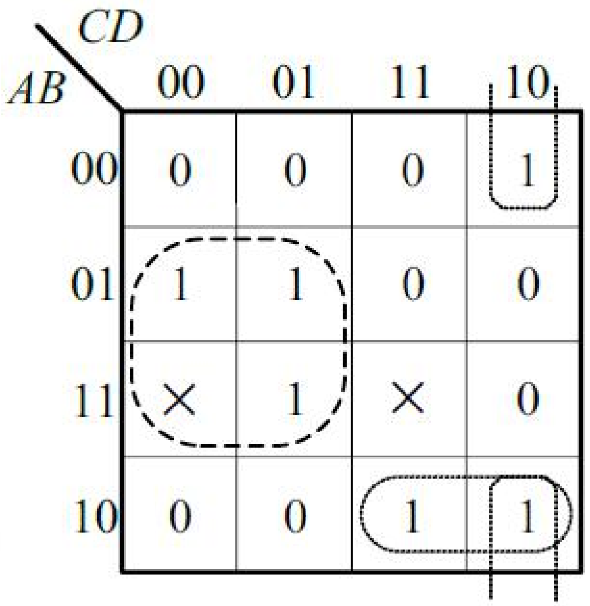
【例】用卡诺图化简多输出函数：

$$\begin{cases} F_1 = \sum m(2,4,5,10,11,13) + \sum d(12,15) \\ F_2 = \bar{A}B + B\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} \\ F_3 = \prod M(0,1,6,7,8,9,14,15) \cdot \prod d(2,4) \end{cases}$$

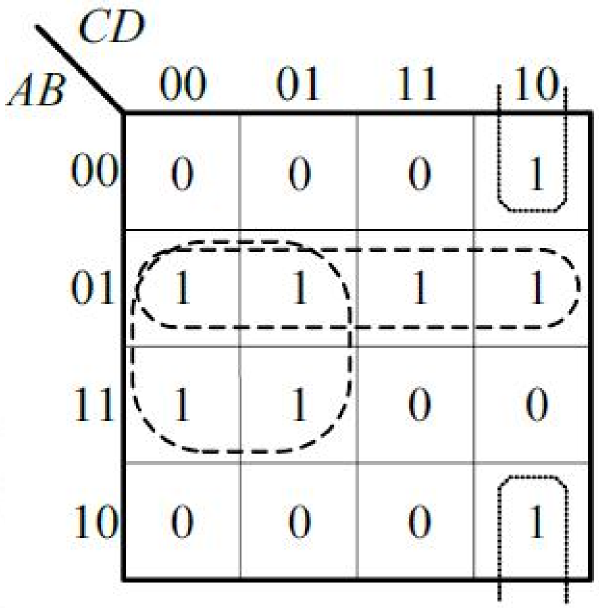
4.多输出函数的化简

解： 1)画出F_1、F_2、F_3的卡诺图。

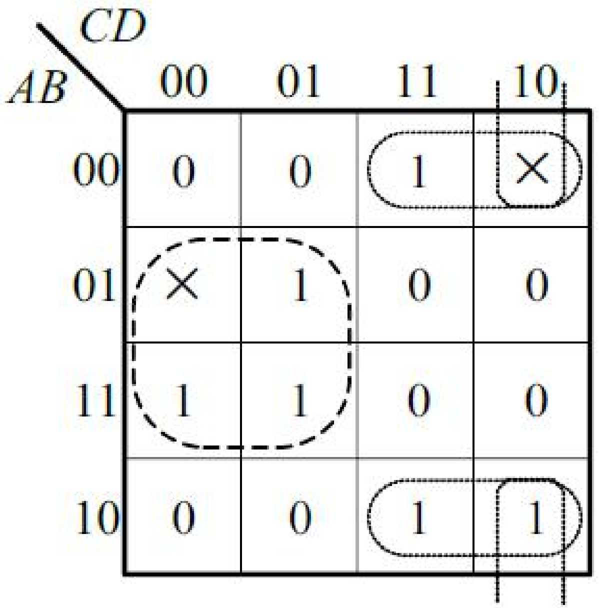
2)使用圈1法，按尽量圈公共项的原则画圈。



(a) F_1的卡诺图



(b) F_2的卡诺图



(c) F_3的卡诺图

逻辑函数的化简方法

4.多输出函数的化简

3)写出表达式。

$$\begin{cases} F_1 = B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C \\ F_2 = B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B \\ F_3 = B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C \end{cases}$$

3个输出函数所共有

F1和F3所共有

本章 完